Stage de recherche Master 2

Etude théorique de l'échantillonnage compressé avec des matrices pseudo-aléatoires : applications à l'imagerie ultrasonore

Encadrants : Adrian Basarab, Denis Kouamé et Ion Nechita
Contact : `Adrian.Basarab@irit.fr`, `denis.kouame@irit.fr`
et `nechita@irsamc.ups-tlse.fr`
Lieu du stage : IRIT / Laboratoire de Physique Théorique, Toulouse
Année universitaire : 2012-2013

Contexte

L'échographie (ou l'imagerie ultrasonore) fait partie des principales méthodes d'imagerie en raison de son caractère non invasif, non ionisant et de son coût modéré. Elle souffre cependant d'une résolution spatiale limitée et, dans certains cas (dont l'imagerie 3D) d'une quantité très volumineuse de données acquises. Introduit en 2006 dans le domaine des mathématiques appliquées [1], l'échantillonnage compressé (EC) est une théorie qui permet de reconstituer un signal (ou une image) à partir d'un très faible nombre de mesures, au-delà de la limite imposée classiquement par le théorème de Shannon. Pour que cette reconstruction soit parfaite avec une forte probabilité, des conditions sont nécessaires : le signal doit être parcimonieux (c'est-à-dire, avoir peu de coefficients non nuls) dans une base connue et la base de mesures doit être incohérente avec cette base et le nombre de mesures doit être suffisant par rapport au taux de parcimonie du signal. L'EC peut donc se résumer ainsi. Soit un signal $x \in \mathbb{R}^N$, considéré K-sparse dans une base Ψ (i.e. $s = \Psi x \in \mathbb{R}^N$ contient au plus K valeurs non nulles). Soit $y \in \mathbb{R}^M$ un vecteur de mesures, avec $y = \Phi x$, $M \ll N$. Si les deux bases Ψ et Φ sont *incohérentes* [1] et $M \geq CK \log K$ (pour une constante C), alors il est possible de retrouver s (et donc x) à partir de y. Il faut noter que le nombre de mesures M ne dépend que de la parcimonie K et non pas de la taille du signal N ; en effet, la méthode trouve son intérêt dans les situations où $K \ll N$. La procédure de reconstruction est la suivante :

$$s = \underset{y=\Phi\Psi^{-1}\tilde{s}}{\arg\min} \|\tilde{s}\|_1. \tag{1}$$

L'intérêt de cette procédure de reconstruction se trouve dans sa complexité algorithmique réduite. L'approche naïve de retrouver l'élément le "plus parcimonieux" (i.e. de support minimal) parmi l'ensemble des solutions du système sous-determiné $y = \Phi\Psi^{-1}\tilde{s}$ est très couteuse en temps de calcul, étant un problème combinatoire NP-difficile. L'originalité de la méthode consiste a remplacer la minimisation de la norme $\|\cdot\|_0$ (la taille du support) par la minimisation de la norme $\|\cdot\|_1$. En effet, on dispose des algorithmes rapides et puissants pour résoudre

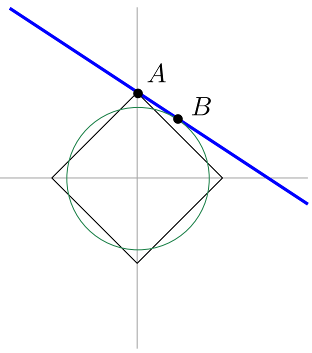


FIGURE 1 – Dans le cas où l'espace des solutions de $y = \Phi\Psi^{-1}\tilde{s}$ est de dimension 1 (droite bleue), la minimisation de la norme 1 donne la solution la plus parcimonieuse A, contrairement à la minimisation de la norme 2 (B).

le problème ℓ_1 de façon efficace. Le choix de la norme 1 est très important, comme le suggère la Figure 1.

Généralement, il a été montré [1] qu'une matrice Φ avec des entrées i.i.d. Gaussiennes aléatoires est incohérente avec n'importe quelle base Ψ déterministe. Dans nos précédents travaux concernant l'application de l'EC en imagerie ultrasonore [2], nous avons utilisé une variante d'un cas particulier d'EC, également appelé *partial Fourier transform* [3]. Dans notre cas, la base de parcimonie est la transformée de Fourier 2D ($\mathcal{F}$) et la base de mesures est une *décimation aléatoire* de l'image (D). L'équation (1) devient dans notre cas :

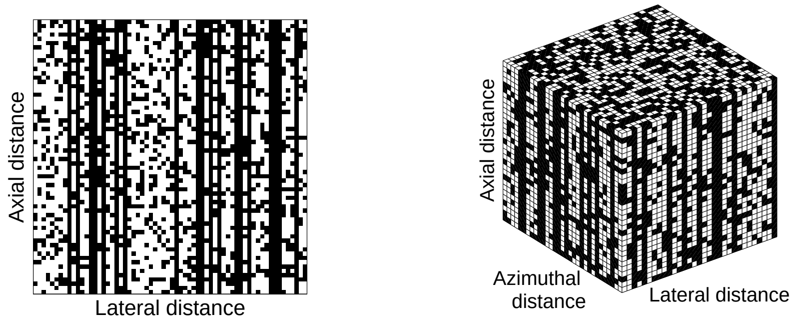
$$s = \underset{y = D\mathcal{F}^{-1}\tilde{s}}{\arg\min} \|\tilde{s}\|_1. \tag{2}$$

Si D représente une décimation aléatoire de l'image, alors il a été montré théoriquement que la reconstruction est parfaite (l'erreur de reconstruction est de l'ordre de la puissance du bruit dans les mesures). Cependant, en imagerie ultrasonore une décimation complètement aléatoire ne présente pas beaucoup d'intérêt pratique. Nous avons ainsi proposé d'utiliser une décimation comme montré par l'image (le masque) ci-dessous (Figure 2(a)). Ainsi, nous avons considéré une décimation aléatoire de certaines colonnes de l'image, et nous avons interdit des mesures sur des colonnes entières, aléatoirement choisies. Nous avons également proposé un extension pour des volumes de données 3D (Figure 2(b)).

Comme prévu, cette façon de décimer les images n'est pas totalement aléatoire, ce qui implique des moins bons résultats de reconstruction.

Objectifs du stage

Le premier objectif du stage est d'étudier les propriétés mathématiques des matrices de décimation introduites ci-dessous, dans le cadre de l'EC. Ces propriétés, ainsi que des caractéristiques intrinsèques des images (comme par exemple le taux de corrélation entre les colonnes de l'image), devraient nous mener à établir des bornes théoriques pour la réussite de l'EC. Ainsi, nous seront capables d'apporter des réponses théoriques à des questions pratiques comme :



(a) Cas 2D (b) Cas 3D

FIGURE 2 – Schémas de décimation proposés en imagerie ultrasonore.

1. Quel est le nombre minimal de mesures pour une reconstruction parfaite ?
2. Quel est le nombre minimal de colonne de l'image à échantillonner ?
3. Quel est le lien entre le nombre de mesures et le taux de parcimonie (ou le taux de corrélation entre les colonnes de l'image) ?
4. Quelle sont les propriétés "idéales" de la base de parcimonie à utiliser ?

Le deuxième objectif du stage, est d'apporter une modification (une transformation supplémentaire) capable de ramener le cas de notre décimation pseudo-aléatoire au plus près du cas idéal d'une décimation aléatoire. Pour cela, nous pourront utiliser des approches similaires à proposées dans des travaux récents (décomposition de la matrice de mesure sous forme de plusieurs matrices élémentaires avant des propriétés bien connues) [3]. Un lien théorique sera également fait avec des méthodes d'EC adaptées à la reconstruction de signaux corrélés [4].

Le troisième objectif du stage sera d'évaluer la possibilité de faire de l'EC avec des matrices déterministes, plus facilement réalisables en pratique.

Références

[1] E. J. Candes, J. Romberg, T. Tao, Robust uncertainty principles : exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 52, no. 2, pp. 489-509, 2006.

[2] Céline Quinsac, Adrian Basarab, Denis Kouamé. Frequency domain compressive sampling for ultrasound imaging. Dans : Advances in Acoustics and Vibration, Hindawi Publishing Corporation, Numéro spécial Advances in Acoustic Sensing, Imaging, and Signal Processing, Vol. 12, p. 1-16, 2012.

[3] Thong T. Do, Lu Gan, Nam H. Nguyen, Trac D. Tran, Fast and Efficient Compressive Sensing using Structurally Random Matrices, IEEE Trans. Signal Processing, 2011.

[4] M.F. Duarte, S. Sarvotham, D. Baron, M.B. Wakin, R.G. Baraniuk, Distributed compressed sensing of jointly sparse signals, Asilomar Conf. Signals, Sys., Comput, pp. 1537-1541, 2005.